Colle du 10 mars : Espaces hermitiens - Séries de Fourier

19.1 Cours

Question de cours 1 : Théorème de convergence en moyenne quadratique et formule de Parseval.

Question de cours 2 : Théorème de Dirichlet.

Question de cours 3 : Que dire sur les coefficients de Fourier d'une fonction suffisamment régulière ?

19.2 Exercices

Exercice 0 : Tous les exercices de la semaine précédente.

Exercice 1 : Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ périodiques, de classe C^∞, et pour lesquelles il existe un réel $M > 0$ tel que, pour tout $p \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, on a $|f^{(p)}(x)| \leq M$.

Exercice 2 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique dont tous les coefficients de Fourier d'indice impair sont nuls. Montrer que f est π-périodique.

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue 2π périodique. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Notons c_k les coefficients de Fourier de f. On suppose que $c_k = 0$ pour $0 \leq k \leq n-1$. Montrer que f admet au moins $2n$ zéros dans $[0, 2\pi]$.

Exercice 4 : 1. En étudiant la fonction 2π-périodique qui coïncide avec la fonction carré sur $[-\pi, \pi[$, calculer $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^4}$.
2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $\|f\|_\infty \leq \frac{\|f''\|_2}{3\sqrt{5}}$.

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe C^∞ telle que, pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, $x^n f^{(m)}(x) \to 0$ quand $x \to \pm\infty$. Pour $n \in \mathbb{Z}$, on pose $c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-int} dt$. Montrer que $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(2k\pi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n$. En déduire la formule $h(t) = \sqrt{t} h(\frac{1}{t})$ pour $t > 0$, où $h(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \exp(-\pi k^2/t)$.

Exercice 6 : Soit E l'espace des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques. On munit E du produit hermitien $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t) dt$. L'espace E est-il complet ?

Exercice 7 : Soient f et g deux fonctions 1-périodiques de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que la famille $(1, \alpha, \beta)$ est $\mathbb{Q}$-libre. Montrer que $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\alpha n) g(\beta n) \to \int_0^1 f \int_0^1 g$ quand $N \to +\infty$. En déduire que la suite $(\{n\alpha\}, \{n\beta\})$ est dense dans $[0,1]^2$. Que dire de la réciproque ?